где $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ – единичная $n \times n$-матрица, т. е. все главные миноры матрицы $\mathbf{I} - |\mathbf{A}|$ должны быть положительными.

В настоящем сообщении указан признак устойчивости, когда имеет место свойство (2) (сравни с [4]).

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы матрица* $\boldsymbol{A}$ *была матрицей Ляпунова в дискретном смысле, необходимо, если она вещественная и неотрицательная, и достаточно — в общем случае, — чтобы были выполнены следующие два условия:*

1) все главные миноры матрицы $\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|$ *были неотрицательные, т. е.*

$$(\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|)\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0, 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n, p = 1, 2, \dots, n,$$

2) ранг матрицы $\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|$ *равен ее главному рангу, т. е. рангу, подсчитанному при помощи только главных (а не всех) миноров:*

$$rang(\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|) = main\ rang(\boldsymbol{I} - |\boldsymbol{A}|).$$

Последнее условие в теореме является наиболее тонким, в то время как для симметричной матрицы $\mathbf{A}$ оно выполнено автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

2. *Перов А.И.,Грязнова Т.С.* Детерминантный признак сжатия // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: ИПЦ ВГУ. 2013. С. 183-184.

3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

4. *Перов А.И.* Дискретная теория устойчивости неотрицательных матриц. Препринт № 45. Воронеж: НИИМ ВГУ, 2012. 62 с.

Gryaznova T.S. ABOUT SIGN OF STABILITY IN DISCRETE SENSE
We offer a sign of stability, which is based by determinantal criterion of Mezler.
Key words: theory of nonnegative matrix; determinantal criterion of Mezler.

УДК 517.988.6

ТЕОРЕМА БОРСУКА–УЛАМА ДЛЯ КВАЗИОБРАТИМЫХ ОПЕРАТОРОВ.НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

© С.С. Губина

Ключевые слова: сюръективный оператор; квазиобратимый оператор; нечетное отображение.
Рассматривается новый вариант бесконечномерной теоремы Борсука-Улама, в которой сюръективный оператор A является квазиобратимым и приводится одно приложение этой теоремы.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный сюрьективный оператор, $f: X \subset E_1 \to E_2$ — некоторое оторажение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$A(x) = f(x). \tag{1}$$

Обозначим $N(A, f)$ множество решений уравнения (1).

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что сюрьективный оператор A является квазиобратимым, если существует непрерывное отображение $p: E_2 \to E_1$, такое, что $A(p(y)) = y$ для любого $y \in E_2$. В этом случае отображение p будем называть квазиобратным к оператору A.*

В дальнейшим будем предполагать, что оператор A квазиобратим и p является отображением квазиобратным к A.

Примеры квазиобратимых операторов и их свойства приведены в [1].

О п р е д е л е н и е 2. *Будем говорить, что отображение f является A-вполне непрерывным, если оно непрерывно и для любого ограниченного множества $V \subset E_2$ и любого ограниченного множества $B \subset X$ множество $\overline{f(B \cap A^{-1}(V))}$ является компактным.*

Известно, что замкнутый линейный сюрьективный оператор является квазиобратимым (см. [2]).

Пусть $S_r(0)$ — сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1, отображение $f: S_r(0) \to E_2$ является A-вполне непрерывным нечетным отображением. В статье [2] доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если $dim(Ker(A)) \geqslant 1$, то уравнение (1) на сфере $S_r(0)$ имеет непустое множество решений и*

$$dim(N(A, f)) \geqslant dim(Ker(A)) - 1.$$

Рассмотрим приложение этой теоремы в теории дифференциальных уравнений.

О решениях дифференциальных уравнений. Пусть T – произвольное положительное число, $[0, T]$ — отрезок числовой прямой R, $C_{[0,T]}$ пространство непрерывных векторнозначных функций, определенных на отрезке $[0, T]$, со значениями в R^n. Пусть заданы линейные непрерывные функционалы

$$L_i : C^1_{[0,T]} \to R, i = 1, \ldots, k$$

причем $0 \leqslant k < 2n$. Будем предполагать, что отображение $L : C_{[0,T]} \to R^k$, $L(x(\cdot)) = (L_1(x(\cdot)), \ldots, L_k(x(\cdot)))$, является вполне непрерывным оператором.

Пусть $P^2[t] = \{\beta t + \gamma \mid t \in [0, T],\ \beta,\ \gamma \in R^n\}$ — множество линейных вектор-функций на отрезке $[0, T]$. Будем предполагать, что отображение L удовлетворяет следующему условию: *сужение оператора L на подпространство $P^2[t]$ является сюрьективным оператором.*

Обозначим $D(M)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций на промежутке $[0, T]$, оператор $M: D(M) \subset C_{[0,T]} \to C_{[0,T]} \times R^k$ определен соотношением

$$M(x(\cdot)) = (x''(\cdot), L(x(\cdot))),$$

норма $C_{[0,T]} \times R^k$ определена по правилу: $||(x, u)|| = ||x||_C + ||u||_{R^k}$. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 1. *При сделанных предположениях оператор M имеет ненулевое ядро размерности $2n - k$, является сюрьективным и квазиобратимым оператором.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{2}$$

где $f: R^1 \times R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию

$$f(t, -x, -y) = -f(t, x, y).$$

Нас будет интересовать задача существования решений уравнения (2), определенных на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$L_i(x(\cdot)) = 0, i = 1, 2, ..., k \tag{3}$$

$$\max_{t \in [0,T]} ||x(t)|| = N, \tag{4}$$

где N – некоторое фиксированное положительное число.

Обозначим $\sum_{N,L}([0,T])$ множество решений задачи (2, 3, 4). Дадим операторную трактовку задачи (2), (3), (4).

Пусть $\widehat{f}: D(M) \to C_{[0,T]}$ — оператор суперпозиции, опеределенный следующим образом:

$$y(t) = \widehat{f}(x)(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$

Рассмотрим оператор $g: C_{[0,T]} \to C_{[0,T]} \times R^k$ такой, что $g(x) = (\widehat{f}(x), 0)$.

Л е м м а 2. *Оператор g является нечетным и M -вполне непрерывным.*

На основе предыдущих лемм и теоремы доказывается следующее утверждение:

Т е о р е м а 2. *При сделанных предположениях множество $\sum_{N,L}([0,T]) \neq \emptyset$ и $dim(\sum_{N,L}([0,T])) \geqslant 2n - k - 1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельман Б.Д., Рыданова С.С.* Об операторных уравнениях с сюрьективными операторами // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2012. № 1. С. 93-98.

2. *Рыданова С.С.* Теорема Борсука–Улама для квазиобратимых операторов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012. 2012. С. 193-195.

Gubina S.S. THEOREM BORSUK-ULAM FOR QUASIINVERTIBILITY OPERATORS. SOME APPLICATIONS

The new version of the infinite-dimensional Borsuk-Ulam, which surjective operator A is a quasi-reversible and is an application of this theore is discussed.

Key words: surjective operator; quasiinvertibility operator; odd mapping.

УДК 517.977.1

ВНУТРЕННИЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© **М.И. Гусев**

Ключевые слова: управляемая система; множество достижимости; фазовые ограничения; метод штрафных функций.

Рассматривается задача об аппроксимации множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, заданными в виде неравенства или системы неравенств. Изучается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений, посредством сужения множества скоростей исходной системы. Доказана сходимость аппроксимирующих множеств в хаусдорфовой метрике и получена оценка скорости сходимости.